Štátny pedagogický ústav, Pluhová 8, 830 00 Bratislava

CIEĽOVÉ POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI MATURANTOV Z MATEMATIKY

Bratislava 2008

ÚVOD

Cieľové požiadavky z matematiky sú rozdelené vo väčšine kapitol na časti *Obsah*, *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* a *Príklady.*

Text v jednotlivých častiach vytlačený *obyčajnou kurzívou* predstavuje odvolávky, vysvetlivky a komentáre.

V každej kapitole sú v odseku *Obsah* (rozdelenom spravidla na 2 menšie časti s názvami *Pojmy* a *Vlastnosti a vzťahy*) vymenované termíny a vzťahy (vzorce, postupy, tvrdenia), ktoré má žiak ovládať. Toto ovládanie v prípade *pojmov* znamená, že žiak

- rozumie zadaniam úloh, v ktorých sa tieto pojmy vyskytujú,
- vie ich správne použiť pri formuláciách svojich odpovedí,
- vie ich stručne opísať (definovať).

V prípade *vlastností a vzťahov* ovládaním rozumieme žiakovu schopnosť vybaviť si tieto vzťahy v mysli (bez toho, aby mu bolo potrebné pripomínať konkrétnu podobu uvedeného vzťahu, postupu, či tvrdenia) a použiť ich pri riešení danej úlohy (pričom spôsob tohto použitia špecifikuje časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti*, o ktorej hovoríme nižšie). Kvôli prehľadnosti neuvádzame úplné znenie jednotlivých vzťahov so všetkými predpokladmi a podmienkami, ale len takú ich podobu, z ktorej je jasné, aké tvrdenie máme na mysli.

Pokiaľ sa v zadaniach úloh alebo otázok, ktoré má žiak riešiť alebo zodpovedať, vyskytnú pojmy, ktoré nie sú uvedené v časti *Obsah*, bude potrebné ich v texte zadania vysvetliť. Rovnako tak v prípade, že zadanie vyžaduje použitie postupu alebo vzťahu, ktorý nie je zahrnutý do časti *Obsah*, musí byť žiakovi k dispozícii opis požadovaného postupu alebo vzťahu (tento opis však nemusí byť súčasťou zadania, môže byť napríklad uvedený vo “vzorčekovníku”, ktorý bude priložený k celému súboru zadaní). Výnimku z tohto pravidla predstavuje situácia, keď riešením úlohy má byť *objavenie* alebo *odvodenie* takého vzťahu, ktorý nebol uvedený v odseku *Vlastnosti a vzťahy*.

Časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* opisuje v každej kapitole činnosti, ktoré má byť žiak schopný správne realizovať. V texte používanú formuláciu “*žiak vie...”* pritom chápeme v zmysle *“žiak má vedieť...”*; podobne formulácia *”... pokiaľ (ak) žiak vie...”* znamená *”... ak je v týchto cieľových požiadavkách uvedené, že žiak má vedieť...”*. Teda napríklad text *“žiak vie nájsť všetky riešenia nerovnice* $f(x) \leq a$ *, pokiaľ vie riešiť rovnicu* $f(x) = a$ *a súčasne vie načrtnúť graf funkcie* f*”* (ktorý čitateľ nájde v kapitole 1.4) treba chápať tak, že na inom mieste týchto cieľových požiadaviek je špecifikované, grafy ktorých funkcií f má žiak vedieť načrtnúť, a pre ktoré funkcie f má žiak vedieť riešiť rovnicu $f(x) = a$. Podobnú úlohu plní odvolávka *“pozri...”*; napríklad v texte *“žiak vie nájsť definičný obor danej funkcie (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)”* táto odvolávka upozorňuje, že stupeň náročnosti, na ktorom má žiak zvládnuť určovanie definičného oboru funkcie, je daný náročnosťou rovníc a nerovníc, ktoré pri tom musí vyriešiť, pričom táto náročnosť je opísaná v časti 1.4. Odvolávka *“pozri tiež...”* upozorňuje čitateľa, že uvedený pojem alebo činnosť sa vyskytuje aj na inom mieste tohto textu.

Žiak by mal byť schopný riešiť *úlohy komplexného charakteru*, teda úlohy, ktorých riešenie vyžaduje spojenie *neveľkého počtu* činností opísaných v týchto cieľových požiadavkách (pritom nevylučujeme spájanie činností opísaných v rôznych kapitolách); napr. pri riešení “klasickej” slovnej úlohy by mal žiak zvládnuť formuláciu príslušného problému v reči matematiky, jeho vyriešenie prístupnými matematickými prostriedkami a formuláciu odpovede opäť v reči pôvodného slovného zadania. Jednotlivé činnosti uvedené v časti *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* predstavujú teda len akési “tehličky” či “základné stavebné kamene”, pričom riešenie jedného konkrétneho zadania môže vyžadovať i použitie a spojenie viacerých takýchto “tehličiek”.

V snahe o ucelenosť jednotlivých kapitol uvádzame tie pojmy a zručnosti, ktoré súvisia s viacerými kapitolami, v každej z nich. Z toho istého dôvodu sú do textu zaradené i niektoré pojmy, vzťahy a činnosti, ktoré sú obsahom učiva základnej školy.

Úlohy, uvedené v časti *Príklady*, nemajú predstavovať reprezentatívnu zbierku typov a foriem úloh, s ktorými sa bude žiak na maturite z matematiky stretávať; prvoradou funkciou týchto príkladov je dokumentovať tie formulácie, u ktorých podľa nášho názoru príklad pomáha objasniť text, alebo špecifikovať stupeň požadovanej náročnosti. Dostatočne bohatú zbierku príkladov úloh, s ktorými sa žiak stretne na externej časti maturitnej skúšky z matematiky, predstavujú úlohy Monitorov z rokov 1999 - 2003.

1 ZÁKLADY MATEMATIKY

1.1 Logika a množiny

Obsah

Pojmy:

výrok, axióma, definícia, úsudok, hypotéza, tvrdenie, pravdivostná hodnota, logické spojky, negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, vyplýva, je ekvivalentné, kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve), priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom, množina, prvky množiny, podmnožina, nadmnožina, prienik, zjednotenie a rozdiel množín, Vennove diagramy, disjunktné množiny, prázdna množina, doplnok množiny, konečná a nekonečná množina.

Vlastnosti a vzťahy:

- Implikácia (výrok) $A \Rightarrow B$ je ekvivalentná s implikáciou (výrokom) $B' \Rightarrow A'$ (výrok z *A* vyplýva *B* platí práve vtedy, keď platí výrok z negácie *B* vyplýva negácia *A*),
- výroky *A*, *B* sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$,
- negácia konjunkcie (disjunkcie) je disjunkcia (konjunkcia) negácií,
- implikácia $A \Rightarrow B$ je nepravdivá práve vtedy, keď je pravdivý výrok *A* a nepravdivý výrok *B*,
- pravdivosť zložených výrokov a negácie *("tabuľka pravdivostných hodnôt")*,
- negácia výroku $\forall x \in M$ *platí V(x)* je $\exists x \in M$, *pre ktoré neplatí V(x)*,
- negácia výroku $\exists x \in M$, *pre ktoré platí V(x)* je $\forall x \in M$ *neplatí V(x)*,
- $A = B$ práve vtedy, keď súčasne platí $A \subset B$, $B \subset A$,
- pre počty prvkov zjednotenia dvoch množín platí $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- rozlíšiť používanie logických spojok a kvantifikátorov vo vyjadrovaní sa v bežnom živote na jednej strane a v rovine zákonov, nariadení, zmlúv, návodov, matematiky na strane druhej,
- zistiť pravdivostnú hodnotu zloženého výroku (vytvoreného pomocou negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie) z pravdivostných hodnôt jednotlivých zložiek *(teda napísať pre danú situáciu príslušný riadok "tabuľky pravdivostných hodnôt")*,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či je výrok negáciou daného výroku, vytvoriť negáciu zloženého výroku (nie len pomocou *"nie je pravda, že ...", pozri príklad 1)*,
- v jednoduchých prípadoch zapísať a určiť množinu vymenovaním jej prvkov alebo charakteristickou vlastnosťou,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o konečnosti či nekonečnosti danej množiny *pozri príklad 2)*,
- opísať základné druhy dôkazov (priamy, nepriamy, sporom) a dokumentovať ich príkladmi,
- určiť zjednotenie, prienik a rozdiel množín i doplnok množiny *A* (ak *A* je podmnožinou *B*) vzhľadom na množinu *B (intervaly pozri v 1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,
- použiť vzorec pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín pri hľadaní počtu prvkov týchto množín, resp. ich prieniku alebo zjednotenia,
- pri riešení úloh o množinách použiť ako pomôcku Vennove diagramy (pre 2 – 4 množiny).

Príklady

1. Sú nasledujúce výroky jeden druhému negáciou?
   Existujú aspoň dvaja speváci populárnej hudby, ktorých majú všetci radi.
   Každého speváka populárnej hudby niekto nemá rád.

2. Zistite, či je množina všetkých dvojíc prirodzených čísel (x, y), ktoré sú riešením rovnice $5x + 3y = 100000$ konečná alebo nekonečná.

3. Koľko štvorciferných čísel je bezo zvyšku deliteľných číslom 24 alebo 19?

1.2 Čísla, premenné a výrazy

Obsah

Pojmy:

konštanta, premenná, výraz, obor definície výrazu, rovnosť výrazov, hodnota výrazu, mnohočlen, stupeň mnohočlena, doplnenie do štvorca *(pre kvadratický mnohočlen)*, člen mnohočlena, vynímanie pred zátvorku, úprava na súčin, krátenie výrazu, prirodzené *(N)*, celé (*Z*), nezáporné *(N_0)*, záporné $\left(Z^-\right)$, racionálne *(Q)*, iracionálne (*I*), reálne *(R)* čísla, *n*-ciferné číslo, zlomky (čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, hlavná zlomková čiara), desatinný rozvoj (konečný, nekonečný a periodický), číslo π, nekonečno, číselná os, znázorňovanie čísel, komutatívny, asociatívny a distributívny zákon, odmocnina (druhá), *n*-tá odmocnina, mocnina (s prirodzeným, celočíselným exponentom), exponent a základ mocniny, základ logaritmu, absolútna hodnota čísla, úmera (priama a nepriama), pomer, percento, promile, základ *(pre počítanie s percentami)*, faktoriál, kombinačné číslo, desiatková a dvojková sústava, dekadický a dvojkový zápis, interval (uzavretý, otvorený, ohraničený, neohraničený).

Vlastnosti a vzťahy:

- $x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y)$, $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$, $ax^2 + bx + c = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$,
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $c^0 = 1$, $a, b \geq 0, c > 0, x, y \in Z$,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x}$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0, m, n \in N$,
- $\sqrt{a^2} = |a|$,
- $|x - a|$ je vzdialenosť obrazov čísel x a a na číselnej osi,
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$,
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$,
  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
  $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, $a^{\log_a x} = x$, pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$, $b > 0$,
- $\log_a x + \log_a y = \log_a(x\cdot y)$, $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$, pre $a > 0, a \neq 1, x, y > 0$,
- $\log_a\left(x^y\right) = y\cdot\log_a x$, pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$,

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, pre prirodzené čísla n, $0!=1$,
- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, pre prirodzené čísla n a nezáporné celé čísla k, nie väčšie ako n,
- práve racionálne čísla majú desatinný periodický rozvoj,
- $R = Q \cup I,\ Q \cap I = \{\ \},\ Z = N \cup Z^- \cup \{0\},\ N \subset Z \subset Q \subset R$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:
(čísla)

- zaokrúhľovať čísla,
- upraviť reálne číslo na tvar $\pm a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo a a číslo z intervalu $\langle 1, 10)$,
- vypočítať absolútnu hodnotu reálneho čísla,
- zapísať vzdialenosť na číselnej osi pomocou absolútnej hodnoty,
- znázorňovať čísla na číselnú os, porovnávať čísla na číselnej osi, odčítať čísla z číselnej osi,
- pre konkrétne n všeobecne zapísať n-ciferné číslo,
- na približný výpočet číselných výrazov a hodnôt funkcií (vrátane $\log_a x$) používať kalkulačku, pričom vie
  - upravovať číselné výrazy na tvar vhodný pre výpočet na kalkulačke,
  - zvoliť vhodný postup, aby mu vyšiel čo najpresnejší výsledok *(napr. pri približnom výpočte* $\dfrac{20!}{10! \cdot 10!}$*)*,
- pomocou kalkulačky zistiť ostrý uhol, ktorý má danú goniometrickú hodnotu,
- porovnať dve reálne čísla na úrovni presnosti kalkulačky,
- vyjadriť zjednotenie, prienik a rozdiel konečného počtu intervalov pomocou najmenšieho počtu navzájom disjunktných intervalov, jednoprvkových množín a prázdnej množiny,

(výrazy)

- určiť hodnotu výrazu *(dosadiť)* “ručne” alebo pomocou kalkulačky,
- určiť obor definície výrazu *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- odstrániť absolútnu hodnotu rozlišovaním vhodných prípadov *(t.j.* $|V(x)| = V(x)$ *pre x, pre ktoré* $V(x) \geq 0$ *a* $|V(x)| = -V(x)$ *pre x, pre ktoré* $V(x) \leq 0$*)*,
- doplniť kvadratický trojčlen do štvorca *(pozri tiež 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť)*,
- upravovať mnohočlen na súčin vynímaním pred zátvorku a použitím vzťahov pre rozklady výrazov $x^2 - y^2$, $x^2 \pm 2xy + y^2$, $ax^2 + bx + c$ *(pozri príklad 1)*,
- použiť pri úpravách výrazov (číselných alebo výrazov s premennými) rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy*, roznásobovanie, vynímanie pred zátvorku, krátenie, úpravu zloženého zlomku na jednoduchý *(pozri príklady 2, 3)*,

(práca s premennou)

- používať percentá a úmeru *(pozri príklad 4)*,
- nahradiť premennú vo výraze novým výrazom *(substitúcia, pozri tiež 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- pri priamo závislých veličinách vie vyjadriť jednu pomocou druhej *(pozri príklad5, pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti)*,
- vyjadriť neznámu zo vzorca *(pozri 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti)*,
- zapísať slovný text algebraicky *(matematizácia)*,
  - zapísať vzťahy (v jednoduchom texte) pomocou premenných, čísel, rovností a nerovností,
  - zapísať, vyjadriť bežné závislosti v geometrii,

- riešiť kontextové *(slovné)* úlohy vedúce k rovniciam a nerovniciam *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)* a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania *(pozri príklad 7)*.

Príklady

1. Rozložte mnohočlen $6x^3 - 13x^2 + 7x$ na súčin lineárnych činiteľov.

2. Vyjadrite $2\log x - \log x\sqrt[3]{x} - 1$ ako jeden logaritmus.

3. Pre ktoré čísla *a*, *b* sa výraz $\dfrac{x}{x^2 - x - 2}$ rovná výrazu $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2}$?

4. Zapíšte pomocou premenných, čísel a rovností:

   a) Peter má o *x* % viac .... ako Jano. $\left(P = J\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)\right)$

   b) Adam a Boris si rozdelili peniaze v pomere 2 : 3. ($A = 2x$, $B = 3x$, $x \in R^+$)

5. Kváder so štvorcovou podstavou má povrch 100 cm^2. Vyjadrite jeho objem pomocou jeho výšky.

6. Zapíšte pomocou premenných, čísel, rovností a nerovností:
   Polovica *A* má dĺžku najviac 4. $(0 < A \leq 8)$

7. Jano riešil úlohu *“Súčet $A + B$ je o 80 % väčší ako rozdiel $A - B$. O koľko % je číslo A väčšie ako číslo B?*”. Janovi vyšiel správny vzťah $A = 3{,}5B$. Určte vzťah medzi *A*, *B* pomocou percent!

1.3 Teória čísel

Obsah

Pojmy:

deliteľ, násobok, deliteľnosť, najväčší spoločný deliteľ (NSD), najmenší spoločný násobok (NSN), prvočíslo, zložené číslo, nesúdeliteľné čísla, zvyšok, prvočíselný rozklad, prvočiniteľ.

Vlastnosti a vzťahy:

- Znaky deliteľnosti:
  - posledná cifra: 2, 5, 10,
  - posledné dve cifry: 4, 25, 50,
  - posledné tri cifry: 8,
  - súčet všetkých cifier: 3, 9.
- Prvočísel je nekonečne veľa.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zistiť bez delenia, či je dané číslo deliteľné niektorým z čísel uvedených v znakoch deliteľnosti,
- nájsť NSN, NSD daných čísel,
- nájsť celočíselné riešenia úloh, v ktorých možno jednoduchou úvahou určiť vhodnú konečnú množinu, ktorá hľadané riešenia musí obsahovať *(riešenia úlohy potom nájde preverením jednotlivých prvkov získanej konečnej množiny, pozri príklady 1, 2, 4)*,

- pri riešení jednoduchých úloh využiť pravidelnosť rozloženia násobkov celých čísel na číselnej osi *(pozri príklad 3).*

Príklady

1. Pre ktoré čísla a platí $NSN(6,a)=24$?

2. Pre ktoré čísla A, B je číslo s dekadickým zápisom 34A 57B deliteľné 12?

3. Koľko štvorciferných čísel je deliteľných 23? *(Každé 23. číslo je deliteľné 23.)*

4. Nájdite všetky celé čísla x, y, pre ktoré platí $x^2+y^4=981$. *(Absolútna hodnota y nie je väčšia ako 5.)*

1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Obsah

Pojmy:

rovnica, nerovnica, sústava rovníc, sústava nerovníc a ich riešenie, koeficient, koreň, koreňový činiteľ, diskriminant, doplnenie do štvorca, úprava na súčin, substitúcia, kontrola (skúška) riešenia, (ekvivalentné a neekvivalentné) úpravy rovnice a nerovnice.

Vlastnosti a vzťahy:

- Diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$ je $D=b^2-4ac$,
- riešením kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$ sú $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,
- vzťah medzi diskriminantom a počtom (navzájom rôznych) koreňov kvadratickej rovnice,
- $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$,
- vzťah medzi znamienkom súčinu dvoch výrazov a znamienkom jednotlivých činiteľov.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:
(rovnice)

- nájsť všetky riešenia lineárnej rovnice $ax+b=0$ a kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$, pričom pozná vzťah medzi koreňmi kvadratickej rovnice a koreňovými činiteľmi, počtom riešení *(pozri príklad 1)*,
- nájsť všetky riešenia, resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale I (ak sa nedá presne, tak približne s pomocou kalkulačky) rovnice $f(x)=A$, kde $A\in R$ a f je funkcia
  - $x^a, b^x, \log_b x$ ($a\in Q, b$ je kladné číslo rôzne od 1),
  - $|x-a|$,
  - $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,

  a vie určiť, koľko riešení má uvedená rovnica (v závislosti od čísla A, čísel a, b, c, resp. intervalu I, *pozri príklad 2)*,
- použitím danej substitúcie $y=\varphi(x)$ upraviť rovnicu zapísanú v tvare $f(\varphi(x))=A$ na tvar $f(y)=A$, špeciálne vie nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale I) rovníc
  - $f(ax+b)=A$, kde f je funkcia $x^a, b^x, \log_b x$, sin$x$, cos$x$,
  - $f(ax^2+bx+c)=A$, kde f je funkcia $x^a, b^x, \log_b x$,
- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale I) rovníc zapísaných v tvare

$f(x)g(x)=0$, pokiaľ vie riešiť rovnice $f(x)=0$, $g(x)=0$ *(pozri príklad 4)*,

- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale *I*) rovníc, ktorých riešenie možno upraviť na niektorý z predchádzajúcich tvarov
  - použitím úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti funkcií *(pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie)*,
  - pripočítaním (špeciálne odpočítaním) a vynásobením (špeciálne vydelením) obidvoch strán rovnice výrazom, umocnením (špeciálne odmocnením) obidvoch strán rovnice,
  - odstránením absolútnej hodnoty v prípade rovníc s jednou absolútnou hodnotou *(rozlišovaním dvoch vhodných prípadov)*,

  pričom vie rozhodnúť
  - či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej rovnice,
  - ktoré z koreňov rovnice, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj koreňmi pôvodnej rovnice, resp. - pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych koreňov zmenšiť - o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú koreňmi pôvodnej rovnice *(pozri príklady 5, 6)*,
- riešiť kontextové *(slovné)* úlohy vedúce k rovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania,

(sústavy rovníc)

- opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej a dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi *(pozri 3.2 Analytická geometria v rovine, 4.2 Súradnicová sústava v priestore, vektory, analytická metóda)*,
- nájsť množinu všetkých riešení sústavy 1 - 3 lineárnych rovníc s 1 - 2 neznámymi, a to aj v prípadoch, keď táto sústava má nekonečne veľa riešení alebo nemá riešenia,
- nájsť všetky riešenia sústavy 2 rovníc s 2 neznámymi, ktorú možno jednoducho upraviť na tvar $y=f(x)\wedge g(x,y)=0$ (resp. $x=f(y)\wedge g(x,y)=0$), pokiaľ vie riešiť rovnicu $g(x,f(x))=0$ (resp. $g(f(y),y)=0$),
- upravovať sústavy rovníc použitím
  - úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti elementárnych funkcií *(pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie)*,
  - pripočítania (špeciálne odpočítania) a vynásobenia (špeciálne vydelenia) obidvoch strán rovnice výrazom,

  pričom vie rozhodnúť,
  - či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej sústavy,
  - ktoré z riešení sústavy, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj riešeniami pôvodnej sústavy, resp. - pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych riešení zmenšiť - o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú riešeniami pôvodnej sústavy,

(nerovnice a ich sústavy)

- nájsť množinu všetkých riešení nerovnice
  - $f(x)*L$, kde L je reálne číslo, $*$ je jeden zo znakov nerovnosti $<, \le, \ge, >$, f je niektorá z funkcií $(ax+b)^{\alpha}$, b^x, $\log_b x$, $|x-a|$, resp. množinu všetkých riešení tejto nerovnice ležiacich v danom intervale,
  - $f(x)*L$, kde f je niektorá z funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ a x je prvkom daného ohraničeného intervalu,
  - $\dfrac{f(x)}{g(x)}*0$ a $f(x)g(x)*0$, pokiaľ vie riešiť nerovnice $f(x)*0$, $g(x)*0$, kde $*$ je znak nerovnosti

  (pozri príklady 7, 8, 9),
- pri riešení a úpravách nerovníc správne použiť
  - vynásobenie obidvoch strán nerovnice kladným alebo záporným číslom,
  - pripočítanie výrazu k obidvom stranám nerovnice,
- nájsť všetky riešenia nerovníc, ktorých riešenie možno uvedenými postupmi nahradiť riešením nerovníc uvedených v predchádzajúcej odrážke,

- riešiť sústavu nerovníc s jednou neznámou v prípadoch, keď vie vyriešiť samostatne každú z daných nerovníc *(pozri prieniky a zjednotenia intervalov v 1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,
- v rovine opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej nerovnice s dvoma neznámymi *x*, *y*, ktorú možno zapísať v tvare
  - $y * f(x)$ alebo $x * f(y)$ (kde $*$ je znak nerovnosti) v tých prípadoch, kedy vie načrtnúť graf funkcie $y = f(x)$, resp. $x = f(y)$,
  - $ax + by + c * 0$,
- riešiť kontextové *(slovné)* úlohy vedúce k nerovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

Príklady

1. Pre ktoré číslo *p* má kvadratická rovnica $y^2 + 4y + p = 0$ s neznámou *y* jediné riešenie?

2. Koľko koreňov má rovnica $\cos x = 0,5$ v intervale $(1,26)$?

3. Použitím substitúcie $t = 2^x$ riešte rovnicu $4^x = 2^{x-1} + 14$.

4. Riešte rovnicu $(x+2)^3 - x - 2 = 0$. *(Návod: upravte ľavú stranu rovnice na súčin.)*

5. Riešte rovnicu $\cos 2x + \cos^2 x = 0,5$.

6. Riešte rovnicu $4\sqrt{x+3} + x = 2$.

7. Riešte nerovnicu $0 \le \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$.

8. Riešte nerovnicu $x \cdot \log(4x - 3) > 0$.

9. Určte najmenšie $n \in N$, od ktorého je postupnosť $a_n = \dfrac{3n - 20}{n^2 + 1}$ rastúca.

2 FUNKCIE

2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

Obsah

Pojmy:

premenná (veličina), "daná premenná je funkciou inej premennej", funkcia, postupnosť, argument, funkčná hodnota, *(n*-tý*)* člen postupnosti, definičný obor a obor hodnôt funkcie, graf funkcie, rastúca, klesajúca, monotónna funkcia (postupnosť), maximum (minimum) funkcie (postupnosti), lokálne maximum a minimum funkcie, zhora (zdola) ohraničená funkcia (postupnosť), ohraničená funkcia (postupnosť), horné (dolné) ohraničenie; konštantná, prostá, inverzná, zložená, periodická funkcia; rekurentý vzťah, postupnosť daná rekurentne.

Vlastnosti a vzťahy:

- Rastúca (klesajúca) funkcia je prostá,

- k prostej funkcii existuje inverzná funkcia,
- graf inverznej funkcie f^{-1} je súmerný s grafom funkcie f podľa priamky $y = x$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či niektorá z dvoch daných premenných veličín je funkciou druhej z nich, a túto závislosť vyjadriť, ak je to možné urobiť pomocou predpisov funkcií, ktoré pozná *(pozri príklad 1)*,
- z daného grafu funkcie
  - určiť približne
    - jej extrémy,
    - intervaly, na ktorých rastie (klesá),
  - zistiť, či je zdola (zhora) ohraničená,
- nájsť definičný obor danej funkcie, resp. rozhodnúť, či dané číslo patrí do definičného oboru danej funkcie *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- rozhodnúť, či dané číslo patrí do oboru hodnôt danej funkcie *(pozri 1.4 Rovnice a nerovnice)*,
- nájsť funkčnú hodnotu funkcie v danom bode, určiť jej priesečníky so súradnicovými osami, nájsť priesečníky grafov dvoch funkcií *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- v prípade konštantnej funkcie a funkcií $ax+b$, ax^2+bx+c, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, x^a, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$
  - určiť na danom intervale ich obor hodnôt,
  - určiť intervaly, na ktorých sú tieto funkcie rastúce, resp. klesajúce,
  - načrtnúť ich grafy,
  - nájsť ich najväčšie, resp. najmenšie hodnoty na danom intervale $\langle a, b\rangle$,
  - rozhodnúť, ktoré z nich sú na danom intervale I
    - prosté,
    - zhora (zdola) ohraničené,
- načrtnúť grafy funkcií
  - $|ax+b|$,
  - $a+f(x)$, $f(a+x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, ak pozná graf funkcie f a opísať, ako vznikne uvedený graf z grafu funkcie *f*,
- načrtnúť graf inverznej funkcie f^{-1}, ak pozná graf prostej funkcie *f*,
- nájsť inverzné funkcie k funkciám $ax+b$, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, x^a, a^x, $\log_a x$,
- v jednoduchý prípadoch rozhodnúť o existencii riešenia rovnice $f(x)=0$ (resp. $f(x)=a$), pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie *f*,
- graficky znázorniť na číselnej osi množinu riešení nerovnice $f(x) * a$, kde $*$ je jeden zo symbolov $<, \leq, \geq, >$, pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie *f*,
- nájsť všetky riešenia nerovnice $f(x) * a$, pokiaľ vie riešiť rovnicu $f(x)=a$ a súčasne vie načrtnúť graf funkcie *f*,
- vypočítať hodnotu daného člena postupnosti danej jednoduchým rekurentným vzťahom.

Príklady

1. Veličiny *x, y* sú vyjadrené pomocou premennej *t* nasledovne: $x = 3t^2+1$, $y = 7-2t$. Zistite, či veličina *x* je funkciou veličiny *y* alebo veličina *y* je funkciou veličiny *x.*

2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť

Obsah

Pojmy:

lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť, smernica priamky, diferencia aritmetickej postupnosti, vrchol paraboly.

Vlastnosti a vzťahy:

- Grafom lineárnej (kvadratickej) funkcie je priamka (parabola),
- lineárna (kvadratická) funkcia je jednoznačne určená funkčnými hodnotami v 2 (3) bodoch,
- vzťah medzi koeficientom pri lineárnom člene a rastom, resp. klesaním lineárnej funkcie,
- vzťah medzi diferenciou aritmetickej postupnosti a jej rastom, resp. klesaním,
- kvadratická funkcia má na R jediný globálny extrém, minimum v prípade kladného koeficientu pri kvadratickom člene, maximum v opačnom prípade,
- parabola *(t.j. graf kvadratickej funkcie)* je súmerná podľa rovnobežky s osou y, prechádzajúcej vrcholom paraboly.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: *(pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)*

- riešiť lineárne a kvadratické rovnice a nerovnice *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*, špeciálne vie nájsť priesečníky grafov 2 lineárnych (resp. 2 kvadratických) funkcií alebo lineárnej a kvadratickej funkcie,
- nájsť predpis lineárnej (alebo konštantnej) funkcie, ak pozná
  - hodnoty v 2 bodoch,
  - hodnotu v 1 bode a smernicu grafu tejto funkcie,
- nájsť predpis kvadratickej funkcie, ak pozná
  - jej hodnoty v 3 vhodne zvolených bodoch,
  - vrchol jej grafu a hodnotu v ďalšom bode,
- nájsť intervaly, na ktorých je daná lineárna alebo kvadratická funkcia rastúca, resp. klesajúca,
- nájsť - pokiaľ existuje - najväčšiu a najmenšiu hodnotu kvadratickej a lineárnej funkcie na danom intervale, špeciálne vie nájsť vrchol grafu kvadratickej funkcie, ak pozná jej predpis,
- určiť hodnotu ľubovoľného člena aritmetickej postupnosti, ak pozná
  - jeden jej člen a diferenciu,
  - dva rôzne členy,
- pre aritmetickú postupnosť (danú explicitne) napísať zodpovedajúci rekurentný vzťah,
- nájsť súčet n (pre konkrétne n) za sebou nasledujúcich členov danej aritmetickej postupnosti.

2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

Obsah

Pojmy:

mocnina, n-tá odmocnina, mocnina s prirodzeným, celočíselným exponentom, polynóm, mnohočlen, mocninová funkcia, koeficient pri n-tej mocnine *(v polynomickej funkcii)*, exponent, lineárna lomená funkcia, asymptoty grafu lineárnej lomenej funkcie.

Vlastnosti a vzťahy:

- Polynóm stupňa n má najviac n rôznych reálnych koreňov,
- $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$, $\left(x^r\right)^s = x^{rs}$, $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$, $(xy)^r = x^r \cdot y^r$, $r, s \in Z$,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0, m, n \in N$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: *(pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)*

- použiť rovnosti z časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úpravách výrazov *(pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy)*,
- riešiť rovnice a nerovnice s polynomickými, mocninovými a lineárnymi lomenými funkciami *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- schematicky načrtnúť a porovnať grafy funkcií $y = x^n$ pre rôzne hodnoty $n \in Z$ na intervaloch $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$,
- nájsť rovnice asymptot grafu lineárnej lomenej funkcie,
- nájsť intervaly, na ktorých je lineárna lomená funkcia rastúca, resp. klesajúca a nájsť k nej inverznú funkciu.

2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

Obsah

Pojmy:

exponenciálna a logaritmická funkcia, základ exponenciálnej a logaritmickej funkcie, logaritmus, prirodzený logaritmus, geometrická postupnosť, kvocient geometrickej postupnosti.

Vlastnosti a vzťahy:

- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$, $(a^r)^s = a^{rs}$, pre $a > 0, a \neq 1, r, s \in R$,
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, pre $a > 0, a \neq 1, b > 0, x \in R$,
- $\log_a r + \log_a s = \log_a rs$, $\log_a r - \log_a s = \log_a \dfrac{r}{s}$, pre $a > 0, a \neq 1, r, s > 0$,
- $\log_a (r^s) = s \log_a r$, pre $a > 0, a \neq 1, r > 0, s \in R$,
- $a^{\log_a x} = x$, pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: *(pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)*
(exponenciálna funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave výrazov *(pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy)*,
- riešiť exponenciálne rovnice a nerovnice *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie a^x v závislosti od čísla *a* a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho "význačných" bodov (t.j. [0, 1], [1, *a*]),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola funkcie a^x na danom intervale,
- vyjadriť *n*-tý člen geometrickej postupnosti (pre konkrétne *n*) pomocou jej prvého (alebo iného než *n*-tého) člena a kvocientu *q*,
- nájsť súčet *n* za sebou nasledujúcich členov geometrickej postupnosti (pre konkrétne *n*),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní geometrickej postupnosti v závislosti od jej prvého člena a kvocientu,

(logaritmická funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úpravách výrazov *(pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy)*,
- riešiť logaritmické rovnice a nerovnice *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,

- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie $\log_a x$ v závislosti od čísla a a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho "význačných" bodov (t.j. [1, 0], [a, 1]),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola logaritmickej funkcie na danom intervale,
- vyriešiť jednoduché príklady na výpočet úrokov.

2.5 Goniometrické funkcie

Obsah

Pojmy:

π, goniometrická funkcia, sínus, kosínus, tangens, (najmenšia) perióda.

Vlastnosti a vzťahy:

- hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$,
- vzťahy pre sínus a kosínus dvojnásobného uhla:
  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$,
  $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$,
  $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$,
- graf funkcie kosínus vznikne posunutím grafu funkcie sínus,
- periodickosť a najmenšie periódy jednotlivých goniometrických funkcií.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: *(pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)*

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave goniometrických výrazov *(pozri 1.2 Čísla, premenné, výrazy)*,
- nájsť pomocou kalkulačky riešenie rovnice $f(x) = a$, kde f je goniometrická funkcia, a to aj v prípade, že na kalkulačne niektoré goniometrické alebo inverzné goniometrické funkcie nie sú *(pozri tiež 1.2 Čísla, premenné, výrazy)*,
- riešiť goniometrické rovnice a nerovnice *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- vyjadriť hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ako pomery strán pravouhlého trojuholníka,
- použiť goniometrické funkcie pri výpočte prvkov pravouhlého trojuholníka *(pozri tiež 3.1 Základné rovinné útvary)*,
- vyjadriť *(na základe znalosti súmerností a periodickosti grafov goniometrických funkcií)* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ pre $\alpha \in R$ ako sínus, kosínus alebo tangens vhodného uhla $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,
- nájsť hodnoty všetkých goniometrických funkcií pre daný argument, ak pre tento argument pozná hodnotu aspoň jednej z nich,
- načrtnúť grafy funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, určiť hodnoty v bodoch $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, určiť najmenšie periódy týchto grafov,
- určiť podintervaly daného ohraničeného intervalu, na ktorých sú funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ rastúce, resp. klesajúce,
- rozhodnúť o ohraničenosti funkcie $\mathrm{tg}\, x$ na danom intervale.

3 PLANIMETRIA

3. 1 Základné rovinné útvary

Obsah

Pojmy:

a) Lineárne útvary.
bod, priamka, polpriamka, úsečka, stred úsečky, deliaci pomer, polrovina, rovnobežné a rôznobežné priamky, uhol (ostrý, pravý, tupý), susedné, vrcholové, súhlasné a striedavé uhly, os úsečky, os uhla, uhol dvoch priamok, kolmé priamky, kolmica, vzdialenosť (dvoch bodov, bodu od priamky, rovnobežných priamok).
b) Kružnica a kruh.
stred, polomer *(ako číslo i ako úsečka)*, priemer, tetiva, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica a nesečnica, obvod kruhu a dĺžka kružnicového oblúka, kruhový výsek a odsek, medzikružie, obsah kruhu a kruhového výseku.
c) Trojuholník
trojuholník (ostrouhlý, pravouhlý, tupouhlý, rovnoramenný a rovnostranný trojuholník), vrchol, strana *(ako vzdialenosť, ako úsečka)*, výška *(ako vzdialenosť, ako úsečka i ako priamka)*, uhol, ťažnica, ťažisko, stredná priečka, kružnica trojuholníku opísaná, kružnica do trojuholníka vpísaná, obvod a plošný obsah trojuholníka, trojuholníková nerovnosť, Pytagorova veta, sínusová a kosínusová veta.
d) Štvoruholníky a mnohouholníky.
vrchol, strana *(ako vzdialenosť, ako úsečka)*, uhlopriečka, uhol, konvexný štvoruholník, rovnobežník, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec, lichobežník, rovnoramenný lichobežník, základňa a rameno lichobežníka, výška rovnobežníka a lichobežníka, plošný obsah rovnobežníka a lichobežníka, konvexné, nekonvexné a pravidelné mnohouholníky, obsah mnohouholníka.

Vlastnosti a vzťahy:
a) Lineárne útvary
- Súhlasné uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- striedavé uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- súčet susedných uhlov je 180°,
- vrcholové uhly sú rovnaké.

b) Trojuholník
- Trojuholníková nerovnosť,
- súčet vnútorných uhlov trojuholníka,
- oproti väčšej (menšej) strane leží väčší (menší) uhol, oproti rovnakým stranám ležia rovnaké uhly,
- delenie ťažníc ťažiskom,
- priesečník osí strán je stred opísanej kružnice, priesečník osí uhlov je stred vpísanej kružnice,
- vyjadrenie obsahu trojuholníka pomocou
  - dĺžky strany a k nej príslušnej výšky,
  - dĺžky dvoch strán a sínusu uhla týmito stranami zovretého,
- Pytagorova veta, goniometria pravouhlého trojuholníka *(pozri 2.5. Goniometrické funkcie)*,
- vyjadrenie kosínusov uhlov trojuholníka pomocou dĺžok strán (kosínusová veta),
- $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}, \frac{\sin\beta}{\sin\chi} = \frac{b}{c}, \frac{\sin\alpha}{\sin\chi} = \frac{a}{c}$ (sínusová veta),
- zhodné a podobné trojuholníky, vety o zhodnosti (sss, sus, usu, Ssu) a podobnosti (sss, sus, uu) trojuholníkov,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch trojuholníkov a
  - dĺžkami odpovedajúcich si úsečiek,
  - veľkosťami odpovedajúcich si uhlov,
  - ich plošnými obsahmi.

c) Kružnica a kruh

- Kružnica je jednoznačne určená stredom a polomerom, resp. tromi svojimi bodmi,
- žiadne tri body kružnice neležia na priamke,
- kolmosť dotyčnice k príslušnému polomeru kružnice,
- Tálesova veta,
- závislosť vzájomnej polohy kružnice a priamky na polomere kružnice a vzdialenosti jej stredu od priamky,
- dotykový bod dvoch kružníc leží na spojnici stredov kružníc, závislosť vzájomnej polohy dvoch kružníc od vzdialenosti stredov kružníc a ich polomerov,
- vzťahy pre výpočet obvodu a obsahu kruhu, dĺžky kružnicového oblúka a obsahu kruhového výseku.

d) Štvoruholníky a mnohouholníky

- Rovnobežnosť a rovnaká veľkosť protiľahlých strán rovnobežníka,
- rozpoľovanie uhlopriečok v rovnobežníku,
- rovnosť protiľahlých vnútorných uhlov v rovnobežníku,
- súčet susedných uhlov rovnobežníka,
- súčet vnútorných uhlov lichobežníka priľahlých k jeho ramenu,
- uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a rozpoľujú vnútorné uhly,
- zhodnosť uhlopriečok obdĺžnika a štvorca,
- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- pravidelnému n-uholníku sa dá vpísať a opísať kružnica,
- v rovnoramennom lichobežníku sú rovnaké uhlopriečky a rovnaké uhly pri základni,
- obsah rovnobežníka vyjadrený pomocou strany a príslušnej výšky, resp. pomocou susedných strán a uhla medzi nimi,
- obsah lichobežníka vyjadrený pomocou výšky a veľkosti základní.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- približne vypočítať obvod a obsah narysovaných trojuholníkov, n-uholníkov, kruhov a ich častí,
- vypočítať v trojuholníku, jednoznačne určenom jeho stranami, resp. stranami a uhlami, zvyšné strany a uhly, dĺžky ťažníc, výšok, obvod a obsah *(pozri príklady 1, 3)*,
- rozhodnúť, či sú dva trojuholníky zhodné alebo podobné *(pozri príklad 4)*,
- vlastnosti zhodnosti a podobnosti použiť vo výpočtoch *(pozri príklad 2)*,
- vypočítať obvod a obsah kruhu a kruhového výseku *(pozri príklad 2)*,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
  - priamky a kružnice,
  - dvoch kružníc, ak pozná ich polomery a vzdialenosť stredov,
- vypočítať plošný obsah rovnobežníka, lichobežníka, resp. rozkladom na trojuholníky aj obsah iných mnohouholníkov.

Príklady

1. Šnúra na bielizeň dlhá 3 m je zavesená medzi bodmi A a B, ktorých vzdialenosť je 2 m a ktoré sú 2 m vysoko od zeme. Vo vzdialenostiach po jednom metri sú na šnúre pevne prichytené dve závažia. O koľko cm klesne jedno závažie, ak odstránime druhé závažie?

2. Dve kolesá sú spojené prevodovou reťazou. Polomery kolies sú 10 cm a 5 cm, vzdialenosť stredov je 60 cm. Vypočítajte dĺžku reťaze. Hrúbku reťaze zanedbajte.

3. Dĺžky strán konvexného štvoruholníka sú $|AB| = 20$ cm, $|BC| = 15$ cm, $|CD| = 15$ cm, $|DA| = 20$ cm a uhlopriečka BD má dĺžku 24 cm. Vypočítajte dĺžku druhej uhlopriečky.

4. Pre ktoré x, y sú trojuholníky so stranami 3, x, 5 a y, 6, 15 podobné?

3.2 Analytická geometria v rovine

Obsah

Pojmy:

(karteziánska) súradnicová sústava na priamke (číselná os) a v rovine, súradnice bodu, všeobecná rovnica priamky, smernica priamky, smernicový tvar rovnice priamky, rovnica kružnice.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi smernicami dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecných rovníc dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- aspoň jeden vzťah alebo postup pre výpočet
  - uhla dvoch priamok *(napr. pomocou skalárneho súčinu, kosínusovej vety alebo smerníc)*,
  - vzdialenosti bodu od priamky.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, a určiť súradnice daných bodov,
- vypočítať súradnice stredu úsečky,
- napísať analytické vyjadrenie priamky *(pozri tiež 3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie a 3.4 Zhodné a podobné zobrazenia)*
  - prechádzajúcej dvoma danými bodmi,
  - daným bodom rovnobežne s danou priamkou,
  - prechádzajúcej daným bodom kolmo na danú priamku,
- určiť vzájomnú polohu dvoch priamok (ak sú dané ich rovnice) a nájsť súradnice ich prípadného priesečníka,
- vypočítať
  - vzdialenosť dvoch bodov,
  - vzdialenosť bodu od priamky,
  - vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok,
  - obsah trojuholníka určeného jeho vrcholmi,
  - uhol dvoch priamok,
- napísať rovnicu kružnice *(pozri tiež 3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie a 3.4 Zhodné a podobné zobrazenia)*
  - ak pozná jej stred a polomer,
  - v tvare $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$, ak pozná tri body, ktorými kružnica prechádza,
- určiť z rovnice kružnice jej stred a polomer,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
  - priamky a kružnice,
  - dvoch kružníc,

  ak pozná ich rovnice.

3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov s konštantnou vzdialenosťou od
  - bodu,
  - priamky,
  - kružnice,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od
  - dvoch bodov,
  - dvoch rovnobežných priamok,
  - dvoch rôznobežných priamok,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov, ktoré majú
  - od daného bodu vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
  - od danej priamky vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
  - od jedného bodu väčšiu vzdialenosť ako od druhého bodu,
  - od jednej danej priamky väčšiu vzdialenosť ako od druhej danej priamky,
- opísať v jednoduchých prípadoch množinu bodov daných vlastností
  - pomocou uhlov, častí priamky, kružnice a kruhu *(pozri príklady 1, 2)*,
- znázorniť množinu bodov [*x*, *y*], pre ktoré platí
  - $y * f(x)$, kde $*$ je jeden zo znakov $<, \leq, \geq, >$ a f je predpis funkcie, ktorej graf vie žiak znázorniť *(pozri 2.1 Funkcia a jej vlastnosti)*,
  - $ax + by + c * 0$,

  a v jednoduchých prípadoch aj množinu bodov [*x*, *y*], ktorá je opísaná sústavou dvoch z predchádzajúcich nerovníc *(pozri tiež 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- tieto množiny bodov použiť pri riešení jednoduchých konštrukčných úloh *(pozri 3.5 Konštrukčné úlohy)*.

Príklady

1. Dané sú body *A*, *B*. Nech bod *C* je vrcholom ľubovoľného pravouhlého trojuholníka s preponou *AB*. Určte množinu ťažísk týchto trojuholníkov.

2. Dané sú body *A*, *B*, *D*, ktoré neležia na jednej priamke. Nájdite množinu bodov *C*, pre ktoré je štvoruholník *ABCD* konvexný a súčasne trojuholníky *ABD* a *ABC* majú rovnaký obsah. *(Riešením je polpriamka s krajným bodom D, rovnobežná s priamkou AB.)*

3.4 Zhodné a podobné zobrazenia

Obsah

Pojmy:

zhodné zobrazenie, osová súmernosť, os súmernosti, posunutie, stredová súmernosť, stred súmernosti, otočenie, stred otočenia, orientovaný uhol a jeho veľkosti, uhol otočenia, osovo a stredovo súmerný útvar; skladanie zobrazení, inverzné zobrazenie.

Vlastnosti a vzťahy:

- Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- osová súmernosť je jednoznačne určená osou súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- otočenie je jednoznačne určené stredom a uhlom otáčania,
- posunutie je jednoznačne určené vektorom posunutia, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- vzťah medzi orientovaným uhlom a jeho veľkosťami,

- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- nech A, B sú dva osovo súmerné body podľa priamky p, potom AB je kolmá na p a stred AB leží na p,
- priamka a jej obraz v posunutí sú rovnobežné,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch útvarov a
  - dĺžkami zodpovedajúcich si úsečiek,
  - veľkosťami zodpovedajúcich si uhlov,
  - ich plošnými obsahmi.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:
- zobraziť daný útvar v danom zhodnom zobrazení,
- rozhodnúť, či je daný útvar osovo (stredovo) súmerný,
- napísať súradnice bodu, ktorý je obrazom daného bodu
  - v súmernosti podľa začiatku súradnej sústavy,
  - v súmernosti podľa niektorej súradnej osi,
  - v posunutí,
- určiť inverzné zobrazenie k danému zhodnému zobrazeniu,
- zostrojiť obraz daného útvaru v danom zhodnom zobrazení, resp. útvar podobný s daným útvarom, pri danom pomere podobnosti.

3.5 Konštrukčné úlohy

Obsah

Pojmy:

rozbor, náčrt, konštrukcia, postup konštrukcie.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:
- zdôvodniť postup konštrukcie, t. j. urobiť rozbor jednoduchých konštrukčných úloh, pričom vie použiť
  - nasledujúce základné konštrukcie *(na ktoré sa môže pri opise postupu zložitejších konštrukčných úloh odvolávať bez toho, aby ich podrobne rozpisoval)*:
    - rovnobežku s danou priamkou daným bodom,
    - rovnobežku s danou priamkou v predpísanej vzdialenosti,
    - os úsečky, os uhla,
    - priamku, ktorá prechádza daným bodom a zviera s danou priamkou daný uhol,
    - úsečku dĺžky $\frac{ab}{c}$ (pomocou podobnosti), kde a, b, c sú dĺžky narysovaných úsečiek,
    - rozdeliť úsečku v danom pomere,
    - trojuholník určený:
      - tromi stranami,
      - dvoma stranami a uhlom,
      - dvoma uhlami a stranou,
    - kružnicu
      - trojuholníku opísanú,
      - do trojuholníka vpísanú,
    - dotyčnicu kružnice
      - v danom bode kružnice,

        - z daného bodu ležiaceho mimo kružnice,
        - rovnobežnú s danou priamkou,
    - obraz daného bodu, úsečky, priamky, kružnice a jej častí v danom zhodnom zobrazení *(pozri 3. 4 Zhodné a podobné zobrazenia)*,
    - množiny bodov daných vlastností, uvedené v prvej a druhej odrážke v *3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie*,
  - množiny bodov daných vlastností,
- pri kreslení náčrtu pri rozbore úlohy rozlíšiť jednotlivé možnosti zadania *(napr. "výška leží v trojuholníku" a "výška je mimo trojuholníka")*,
- na základe vykonaného (daného) rozboru napísať postup konštrukcie,
- uskutočniť konštrukciu danú opisom,
- určiť počet riešení v prípade číselne zadaných úloh.

Príklady

1. *(postupné rysovanie)* Zostrojte trojuholník *ABC*, keď je dané c = 6 cm, $\alpha = 75°$, t_c = 8 cm. *(Na základe uvedených údajov je možné skonštruovať trojuholník ASC (S je stred strany AB), v ktorom sú dané 2 strany a uhol.)*

2. *(využitie podobnosti)* Zostrojte trojuholník *ABC,* keď je dané $\alpha = 75°$, $\beta = 45°$, obvod o = 13 cm. *(Dá sa narysovať trojuholník podobný s hľadaným.)*

3. Pre ktorú hodnotu t_c (zvyšné zadanie sa nemení) bude mať príklad 1 jediné riešenie (nebude mať riešenie)?

4 STEREOMETRIA

4.1 Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny

Obsah

Pojmy:

premietanie (voľné rovnobežné premietanie), priemet priestorového útvaru do roviny.

Vlastnosti a vzťahy:

- Voľné rovnobežné premietanie zachováva deliaci pomer a rovnobežnosť.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- použiť vlastnosti voľného rovnobežného premietania pri zobrazovaní kocky, pravidelných hranolov.

4.2 Súradnicová sústava v priestore

Obsah

Pojmy:

(karteziánska) sústava súradníc v priestore, bod a jeho súradnice, vzdialenosť bodov.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, a určiť súradnice daných bodov *(pozri tiež 4.3 Lineárne útvary v priestore - polohové úlohy a 4.4 Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy)*,
- určiť súradnice stredu úsečky,
- špeciálne vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave opísať vrcholy daného kvádra.

4.3 Lineárne útvary v priestore - polohové úlohy

Obsah

Pojmy:

bod, priamka a rovina v priestore, rovnobežné, rôznobežné a mimobežné priamky, rovnobežnosť a rôznobežnosť priamky a roviny, rovnobežné a rôznobežné roviny, priesečnica dvoch rovín, rez telesa rovinou.

Vlastnosti a vzťahy:

- Rovnobežné (rôznobežné) priamky ležia v jednej rovine, mimobežné priamky neležia v jednej rovine,
- priesečnice roviny s dvoma rovnobežnými rovinami sú rovnobežné.

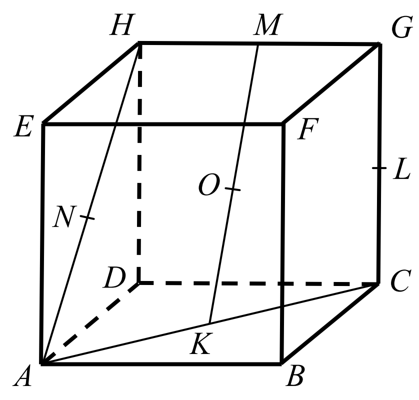
Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- opísať možnosti pre vzájomné polohy ľubovoľných dvoch lineárnych útvarov,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe dvoch lineárnych útvarov pomocou ich obrazu vo voľnom rovnobežnom premietaní *(pozri príklad 1)*,
- zostrojiť vo voľnom rovnobežnom priemete jednoduchého telesa (kocky, resp. hranola) priesečník priamky (určenej 2 bodmi ležiacimi v rovinách stien kocky, resp. hranola) s rovinou steny daného telesa,
- zostrojiť rovinný rez kocky, kvádra rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa.

Príklady

1. Daná je kocka *ABCDEFGH.* Body *K, L, M, N* a *O* sú po rade stredmi úsečiek *AC, CG, GH, AH a KM* *(pozri Obr. 1)*. Ležia body
   a) H, O, C,
   b) G, O, A,
   c) B, O, H,
   d) N, O, L,
   e) D, O, F
   na jednej priamke?



Obr. 1

4.4 Lineárne útvary v priestore - metrické úlohy

Obsah

Pojmy:

uhol dvoch priamok, kolmosť priamok a rovín, priamka kolmá k rovine, uhol dvoch rovín, kolmý priemet bodu a priamky do roviny, vzdialenosť dvoch lineárnych útvarov (dvoch bodov, bodu od roviny, bodu od priamky, vzdialenosť rovnobežných priamok, priamky a roviny s ňou rovnobežnej, vzdialenosť rovnobežných rovín), uhol priamky s rovinou.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- na zobrazených telesách označiť
  - úsečky, ktorých skutočná veľkosť predstavuje vzdialenosť daných lineárnych útvarov,
  - uhly, ktorých skutočná veľkosť predstavuje uhol daných lineárnych útvarov.

4.5 Telesá

Obsah

Pojmy:

teleso, mnohosten, vrchol, hrana, stena, kocka, sieť kocky, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder, rovnobežnosten, ihlan, štvorsten, pravidelný štvorsten, podstava, výšky v štvorstene, guľa, valec, kužeľ, objemy a povrchy telies.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vzorce pre výpočty objemov a povrchov telies

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- rozhodnúť, či daná sieť je sieťou telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- načrtnúť sieť telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu, resp. povrchu kocky, kvádra, pravidelného kolmého hranola, pravidelného ihlana, gule, valca, kužeľa a vie pri tom nájsť a aktívne použiť vzorce pre výpočet objemov a povrchov telies potrebné pre vyriešenie úlohy.

5 KOMBINATORIKA, PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA

5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Obsah

Pojmy:

(kombinatorické) pravidlo súčtu, (kombinatorické) pravidlo súčinu, permutácie, variácie a variácie s opakovaním, kombinácie, faktoriál, kombinačné číslo, Pascalov trojuholník, pravdepodobnosť, doplnková pravdepodobnosť, náhodný jav, nezávislé javy.

Vlastnosti a vzťahy:

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$,

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, $C_k(n) = \binom{n}{k}$, $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$, $P_n = n!$,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
- pre pravdepodobnosť *P* udalosti *A* platí $0 \le P(A) \le 1$,
- $P(A) + P(A') = 1$, kde A' je doplnková udalosť k udalosti *A*,
- pravdepodobnosť istej udalosti je 1,
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ak *A*, *B* sú nezávislé javy.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- riešiť jednoduché kombinatorické úlohy
  - vypisovaním všetkých možností, pričom
    - vie vytvoriť systém (strom logických možností) na vypisovanie všetkých možností (ak sa v tomto strome vyskytujú niektoré možnosti viackrát, vie určiť násobnosť ich výskytu),
    - dokáže objaviť podstatu daného systému a pokračovať vo vypisovaní všetkých možností,
    - na základe vytvoreného systému vypisovania všetkých možností určiť (pri väčšom počte možností algebraickým spracovaním) počet všetkých možností,
  - použitím kombinatorického pravidla súčtu a súčinu,
  - využitím vzorcov pre počet kombinácií, variácií, variácií s opakovaním a permutácií,
- použiť pri úprave výrazov rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy (pozri 1.4 Čísla, premenné, výrazy)*,
- rozhodnúť
  - o závislosti javov *A*, *B*, ak pozná *P (A)*, *P(B)* a $P(A \cap B)$,
  - v jednoduchých prípadoch o správnosti použitia rovnosti $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,
- riešiť úlohy na pravdepodobnosť, založené na
  - hľadaní pomeru všetkých priaznivých a všetkých možností, resp. všetkých nepriaznivých a všetkých priaznivých možností, ak vie tieto počty určiť riešením jednoduchých kombinatorických úloh,
  - doplnkovej pravdepodobnosti.

5.2 Štatistika

Obsah

Pojmy:

diagram – graf (stĺpcový, obrázkový, kruhový, lomený, spojitý, histogram), základný súbor, výberový súbor, rozdelenie, modus, medián, aritmetický priemer (aj viac ako dvoch čísel), stredná hodnota, smerodajná odchýlka, rozptyl, triedenie.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vzťah pre výpočet rozptylu.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- vypočítať aritmetický priemer daných čísel,
- získavať informácie z rôznych tabuliek (napr. autobusová tabuľka) a diagramov,
- spracovať údaje do vhodných diagramov,
- zistiť v danom súbore modus, medián, strednú hodnotu, priemery, rozptyl, smerodajnú odchýlku a uviesť štatistickú interpretáciu získaných výsledkov,

- uviesť príklad súboru s požadovanými podmienkami na modus, medián, strednú hodnotu, priemery, rozptyl, smerodajnú odchýlku *(pozri príklad 1)*,
- znázorniť a vyhodnotiť namerané hodnoty,
- urobiť triedenie a znázorniť ho.

Príklady

1. Navrhnite súbor s 8 hodnotami tak, aby v ňom aritmetický priemer bol väčší ako modus.

ÚPRAVY CIEĽOVÝCH POŽIADAVIEK Z MATEMATIKY PRE ŽIAKOV SO ZDRAVOTNÝM ZNEVÝHODNENÍM

Žiaci so sluchovým postihnutím

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci so zrakovým postihnutím

Úlohy, ktoré vyžadujú vizuálnu skúsenosť sa upravujú, nahrádzajú slovným opisom alebo vypúšťajú.

Žiaci s telesným postihnutím

Konštrukčné úlohy sa nahrádzajú slovným opisom jednotlivých krokov konštrukcie (podľa druhu a stupňa telesného postihnutia).

Žiaci s vývinovými poruchami učenia alebo správania

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.
Žiakom s vývinovou poruchou učenia – dyskalkúlia – neodporúčame konať maturitnú skúšku z matematiky.

Žiaci s narušenou komunikačnou schopnosťou

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci chorí a zdravotne oslabení

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci s pervazívnymi vývinovými poruchami (s autizmom)

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.